

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS DE KRIGAGEM  
ORDINÁRIA E KRIGAGEM LOGNORMAL, APLICADOS À VARIÁVEL SiO<sub>2</sub> NA  
MINA DE CAPANEMA, SANTA BÁRBARA, MG

Jacqueline Neitzel Medeiros

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Monteiro da Rocha

MONOGRAFIA DE TRABALHO DE FORMATURA  
(TF-2011/24)

TF  
M488  
JN.e

SÃO PAULO  
2011

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DEDALUS - Acervo - IGC



30900030339

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS DE KRIGAGEM  
ORDINÁRIA E KRIGAGEM LOGNORMAL, APLICADOS À VARIÁVEL SiO<sub>2</sub>,  
NA MINA DE CAPANEMA, SANTA BÁRBARA, MG

Jacqueline Neitzel Medeiros



Orientador: Prof. Dr. Marcelo Monteiro da Rocha

*De acordo,*  
*J. N. M.*

MONOGRAFIA DE TRABALHO DE FORMATURA  
(TF-2011 / 24)

SÃO PAULO  
2011

*Aos meus pais e irmã*

# Sumário

Agradecimentos .....	i
Resumo .....	iii
Abstract .....	iv
1. Introdução .....	1
2. Localização e vias de acesso .....	1
3. Objetivos .....	2
4. Revisão Bibliográfica .....	3
4.1    Conceitos de Geoestatística .....	3
4.1.1 Teoria das variáveis Regionalizadas .....	3
4.1.2 O Variograma Experimental .....	3
4.1.3 Técnicas de Krigagem .....	5
4.2 Geologia da Área de Estudo .....	8
5. Materiais e Métodos .....	9
6. Desenvolvimento do Trabalho .....	9
7. Apresentação e Discussão dos Resultados Obtidos .....	11
7.1 Consolidação da Base de Dados .....	11
7.2 Regularização das Amostras .....	12
7.3 Transformação dos Dados .....	12
7.4 Análise Estatística .....	13
7.5 Análise Geoestatística .....	14
7.6 Validação Cruzada .....	18
7.7 Estimativa por Krigagem Ordinária .....	19
7.8 Krigagem Lognormal .....	23
7.9 Comparação entre os dois métodos de krigagem .....	26
8. Conclusões .....	28
Referências Bibliográficas .....	29

## AGRADECIMENTOS

Começo agradecendo ao Professor Marcelo Monteiro da Rocha, pela orientação neste trabalho, pela disposição em responder minhas dúvidas, pela ajuda quando nem tudo foi como esperado e principalmente, pela paciência que sempre teve comigo.

Ao Instituto de Geociências (IGc – USP) pela infraestrutura oferecida ao longo de todo o curso e especialmente para a realização desse trabalho. A todo o pessoal da sala 105 e do LIG (Laboratório de Informática Geológica), em especial ao Antônio, que resolve meus pepinos desde os tempos de iniciação científica.

Gostaria de agradecer também aos amigos da Matra Engenharia, em especial ao geólogo Sérgio Tokudo, por tudo que me ensinou sobre Geologia, pelas ótimas histórias, caronas de Fusca e almoços! Ao geólogo Armando Reis, pelas muitas conversas sobre carreira, comida, História, Geografia, cultura portuguesa ou de qualquer lugar do mundo! E também ao Dr. Nieble, ao engenheiro Orlando e à Célia e Ana Paula, grandes companhias para um café e muitas piadas!

A todo mundo da turma 50! Algumas pessoas eram mais próximas no começo, outras ficaram mais próximas no final, mas vocês fizeram esses cinco anos valerem à pena!

Agora, o grande rol de agradecimentos super-especiais:

Saravá, que combina uma meiguice incrível com gosto por filmes de terror, heavy metal e barracos *a la Rochelle*. E se alguma dessas coisas puder ser roxa, melhor. Malena, grande companheira de quarto e a pessoa que detém o recorde de convivência comigo por horas seguidas! E por cuidar de mim nos campos, com balas de gengibre ou se preocupando com o sol queimando minha cútis!

Ao Sinistro, por ter me chamado pra ir no Mc Donald's algumas vezes! E por fazer as maluquices que a gente não esperaria de ninguém (com mais de 13 anos), pela companhia no Eschwege (e no Tibor), e pelas partidas insuperáveis de truco, onde tudo pode acontecer! Ao Fofona, que tem um coração incrível, além dos provérbios e risadas que a gente não esperaria de ninguém (com menos de 58 anos), além claro, do pão de queijo e do churrasco! E aos dois, pelas corridas de férias e nossos planos de correr o ano inteiro, correr a São Silvestre, correr 10 km que fossem! Ao Zaca, que desde a Fuga do Beirut se tornou um grande amigo, obrigada também pela ajuda com essas geoestatísticas, hahaha! Ao Emília, pelas conversas que a gente sempre tem, sobre músicas, livros, lugares, sobre a faculdade, e principalmente, sobre a vida! Você sempre me ouviu bastante e seus conselhos sempre foram importantes pra mim!

E à Ana Paula Chiquini, que é minha segunda irmã, que esteve comigo desde o trote, e dividiu quase todos os momentos desses cinco anos comigo. A gente não conhecia

nada de Geologia, de morar em uma cidade grande, de sair sozinhas, nada de nada, haha, e tudo isso a gente aprendeu junto, e não poderia ter sido melhor!

Ao Nandes, porque ele pediu pra aparecer aqui! Valeu por se empenhar pra me levar pra conhecer os lugares no Rio, se empolgar com as minhas comidas e até planejar eventos culinários de grande porte! E aos outros meninos, Caio, Mike, Vitor, e todos os outros, pelas viagens, *viking masters*, papoulas e etc...

Ao Bruno, minha maior surpresa da faculdade! A pessoa com quem eu mais gosto de estar, quem me entende e não liga que eu seja uma cabeça-de-vento, quem me apoiou sempre que eu duvidei de mim, não só com palavras e carinho, mas realmente se esforçou pra me ajudar!

À minha irmã Ana Paula, a oficial. Você é minha melhor amiga desde sempre, e a melhor irmã que eu podia ter. Você que me defendia na escola, me emprestava suas roupas, me levava pra passear, jantar, ver filmes (obrigada Fernando, por me aceitar de vela) e até hoje conversa até altas horas no quarto!

E aos meus pais, que sempre se esforçaram tanto pra me ver aqui, sempre me ensinaram o que é importante na vida e o que eu devo buscar para mim. Espero que vocês estejam orgulhosos de mim, porque eu tenho muito orgulho da nossa família e amo muito vocês três!

E finalmente, a Deus, porque qualquer pessoa que tem tanto para agradecer como eu, vai estar muito, muito endividado com Ele....

## RESUMO

Este Trabalho de Formatura teve por objetivo comparar dois métodos computacionais de avaliação de recursos/reservas minerais, a krigagem ordinária e krigagem lognormal, aplicando-as à variável teor de  $\text{SiO}_2$  da Mina de Capanema.

A mina de Capanema, hoje exaurida, localiza-se no estado de Minas Gerais na região do Quadrilátero Ferrífero, entre os municípios de Santa Bárbara e Itabirito. Ocupa a parte sudeste da Serra do Ouro Fino, como é chamada naquele trecho a Serra do Espinhaço (Guimarães *et al.* 1986). O depósito está controlado pela estrutura conhecida como Sinclinal do Ouro Fino.

A base de dados utilizada conta com análises e descrições feitas a partir de testemunhos de sondagem rotativa diamantada, coletados segundo uma malha regular e a diferentes profundidades, e com resultados de análises químicas de pó de rocha obtido de furos de perfuratriz. Esta última amostragem servirá como controle das duas técnicas de estimativa.

Os dados de teor de  $\text{SiO}_2$  foram regularizados e transformados por uma função logarítmica, sendo esta etapa necessária para a execução da krigagem lognormal. A análise estatística foi feita através do cálculo de medidas de tendência central e dispersão dos dados em sua forma bruta, regularizada e transformada.

A análise geoestatística considerou a distribuição espacial da mineralização e suas características estruturais. A influência destas em relação ao teor de  $\text{SiO}_2$  é graficamente representada pelo variograma experimental e seu respectivo modelo teórico de variograma.

A partir da validação cruzada dos dados foram definidos os parâmetros de vizinhança para realização da krigagem ordinária e lognormal, que foram realizadas pontualmente, usando as amostras de *rockdrill* como referência de localização dos pontos a estimar. Ambas as técnicas resultaram em teores de  $\text{SiO}_2$  subestimados em relação aos valores reais conhecidos. Essa suavização foi atribuída à pouca representatividade das amostras de sondagens rotativas utilizadas para a estimativa.

## ABSTRACT

This study aimed to compare two computational methods of mineral resources/reserves evaluation, the ordinary and lognormal kriging, by applying both techniques to the variable  $\text{SiO}_2$  grade at Capanema's mine.

Capanema's mine, presently exhausted, is located at Minas Gerais state, at the Quadrilátero Ferrífero region, amongst the towns of Santa Bárbara and Itabirito. It occupies the southeast part of Serra do Ouro Fino, how Serra do Espinhaço is named at this part (Guimarães *et al.* 1986). The deposit is controlled by a structure known as Ouro Fino Syncline.

The database used includes diamond rotating drill logs analysis and descriptions, collected according a regular grid, and at different depths, beyond the results of chemical analysis of rock dust, obtained through rockdrill holes. These dust samples will be used as a control of the results of both estimation techniques.

$\text{SiO}_2$  grades were previously composited, and also transformed using a logarithmic function, being this step required in preparation to execution of lognormal kriging. Afterwards, the classic statistical analysis was done through the measures of central tendency and dispersion of the data in their rough, composited and transformed form.

The geostatistical analysis considered the spatial distribution of the mineralization and its structural characteristics. Their influence over the  $\text{SiO}_2$  grade was graphically represented by the experimental variogram and its respective theoretical model of variogram.

By means of the cross-validation of the data the neighborhood parameters were defined for the execution of the ordinary and the lognormal kriging, which were performed by points, using the rockdrill samples as a location reference for the points to be estimated. Both techniques have resulted in  $\text{SiO}_2$  grades smoothed in comparison to the known grades. This smoothing was attributed to the small representativeness of the drillhole samples used on the estimation.

## 1. INTRODUÇÃO

A geoestatística teve seu surgimento na década de 1950 através, principalmente, dos trabalhos do engenheiro sul-africano D. G. Krige e posteriormente, do francês G. Matheron. Contudo, antes da publicação dos primeiros estudos a estatística já era utilizada na mineração de modo empírico, devido a sua grande utilidade para ajudar a interpolar teores de jazidas, delimitar corpos de minério ou prever a localização de novos depósitos. Porém, a geoestatística não possuía larga utilização, devido os precários recursos computacionais.

Com o aperfeiçoamento dos computadores foi possível o desenvolvimento de métodos mais complexos e precisos, por exemplo a krigagem lognormal, além de popularizar os mais simples, como a krigagem ordinária.

A krigagem ordinária é uma técnica adequada quando a média populacional da variável não é conhecida, ela estima o valor de um ponto não-amostrado através das informações de pontos vizinhos amostrados, aos quais são atribuídos diferentes pesos de acordo com sua proximidade e relevância.

A krigagem lognormal consiste de um processo semelhante, porém é aplicada a variáveis de distribuição lognormal e requer a normalização prévia dos dados, então a krigagem é feita seguindo os mesmos mecanismos da krigagem ordinária e ao final os resultados são transformados para a distribuição original.

No presente trabalho as duas técnicas serão aplicadas à variável teor de  $\text{SiO}_2$  do banco de dados da mina de Capanema, em Santa Bárbara, MG. A amostragem realizada na mina conta com 70 furos de sonda rotativa, coletados segundo uma malha retangular regular e a diferentes profundidades, e com amostras na forma de pó de rocha, obtidos através de 6988 furos de perfuratriz. Deve-se destacar que esta última amostragem servirá como controle do resultado final do trabalho.

## 2. LOCALIZAÇÃO E VIAS DE ACESSO

A mina de Capanema localiza-se no centro-sudeste do estado de Minas Gerais, na região central do Quadrilátero Ferrífero, encontra-se inserida no contexto da Serra do Ouro Fino, uma denominação local da Serra do Espinhaço, no município de Santa Bárbara, próximo às divisas com os municípios de Itabirito e Ouro Preto (Figura 1). O acesso à mina é feito a partir de Belo Horizonte, utilizando a rodovia BR-356 (Ouro Preto – Belo Horizonte).

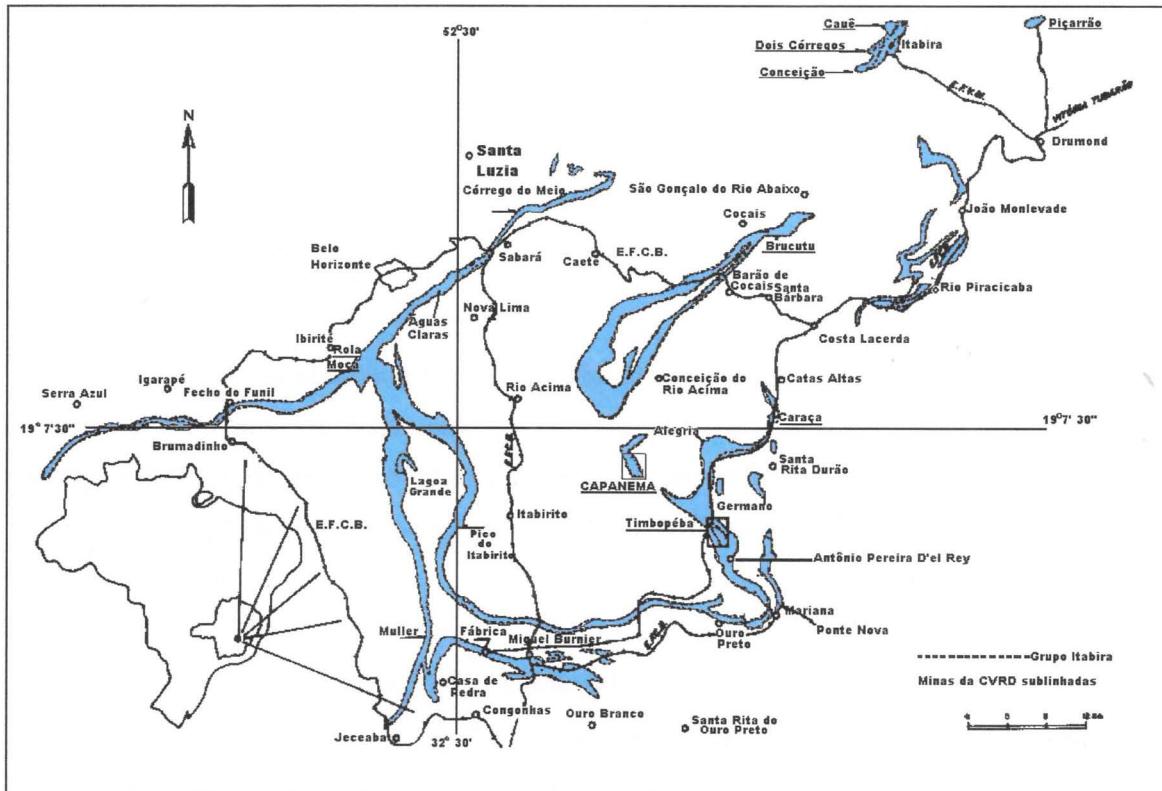


Figura 1 – Situação da Mina de Capanema no estado de Minas Gerais (Rocha, 1999).

### 3. OBJETIVOS

O objetivo deste projeto é propiciar o entendimento das técnicas básicas de Geoestatística e também de algumas das técnicas avançadas, como a krigagem lognormal, utilizando para isso dados reais da mina de Capanema.

Além do aprendizado teórico pretendeu-se também que ao longo do projeto ocorresse o treinamento prático em programas específicos para o estudo geoestatístico, sendo que para isto escolheu-se o programa Isatis, de uso comercial.

Por fim, o objetivo maior deste trabalho é a caracterização estatística e geoestatística adequada dos dados da variável  $\text{SiO}_2$ , obtidos através de dados fornecidos pela empresa Minas de Serra Geral S/A a partir de testemunhos de sondagem e também da análise do pó de furos de perfuratriz realizados na superfície das bancadas de exploração do minério.

Para atingir este objetivo deve-se realizar a:

- Consolidação da base de dados;
- Análise estatística e geoestatística dos dados brutos;
- Transformação logarítmica dos dados;
- Análise estatística e geoestatística dos dados transformados;
- Realização da krigagem ordinária e da krigagem lognormal;
- Análise dos resultados

- Comparação dos métodos quanto a sua eficiência na estimativa da distribuição da variável SiO<sub>2</sub>, confrontando os dados estimados aos dados obtidos pela análise do pó dos furos de perfuratriz.

## 4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 4.1 CONCEITOS DE GEOESTATÍSTICA

Na análise geoestatística os teores são analisados considerando-se seu caráter de variável regionalizada, ou seja, buscando relações entre a distribuição dos teores e a localização das amostras. Os produtos da análise geoestatística, o variograma experimental é o modelo teórico do variograma, são fundamentais para que posteriormente possa ser realizada a krigagem dos dados.

#### 4.1.1 TEORIA DAS VARIÁVEIS REGIONALIZADAS

Em seu trabalho clássico de 1963, Matheron diz que, de certo modo, a geoestatística é tão antiga quanto a mineração, uma vez que desde o início dessa atividade já eram feitas amostragens com a finalidade de interpolar as médias do depósito, utilizando critérios de espessura de camada e zonas de influência; dessa maneira, era possível prever resultados em trabalhos posteriores.

No entanto, a estatística clássica se mostrou insuficiente, pois os processos geológicos não devem ser tratados como variáveis aleatórias. Assim surgiu o conceito de variável regionalizada, cujas principais propriedades também foram definidas por Matheron (1963):

- a variável regionalizada apresenta uma *localização*. Suas variações ocorrem dentro do espaço denominado *campo geométrico*.
- a variável é definida por um *suporte*, o qual consiste simplesmente do volume das amostras, com suas respectivas formas geométricas, tamanho e orientação.
- a mudança do suporte determina a obtenção de uma nova variável regionalizada.
- a variável regionalizada deve apresentar certa *continuidade* em sua variação espacial.
- finalmente, a variável pode apresentar diferentes tipos de *anisotropias*, indicando uma distribuição preferencial devida a alguma propriedade geológica da rocha.

#### 4.1.2 O VARIOGRAMA EXPERIMENTAL

A ferramenta básica da geoestatística é o variograma, o qual consiste em uma curva que mostra a continuidade da variável em relação à distância entre as amostras (Matheron,

1963). É construído a partir da função vetorial semi-variograma  $\gamma(h)$ , a qual é usualmente chamada apenas de variograma (Yamamoto, 2001). Esta função é:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2$$

Onde  $Z(x)$  é o valor da variável regionalizada no ponto  $x$  e  $Z(x+h)$  é o seu valor no ponto  $x$  adicionado de uma distância  $h$ ,  $n$  é o número de pares de pontos e  $\gamma(h)$  é a variância espacial para dada distância  $h$ .

Para que a função variograma seja válida para todos os pontos do domínio estudado devem ser assumidas duas hipóteses: a hipótese intrínseca, a qual foi formalizada por Matheron (1963) a partir da noção intuitiva de que deve haver algo intrínseco nas características representativas da variância de uma variável regionalizada em um campo geométrico geologicamente homogêneo, independentemente da localização.

Essa noção leva à hipótese de que o variograma independe da porção do depósito selecionada para o seu cálculo. Em Yamamoto (2001) vemos que a hipótese intrínseca nos permite assumir que a variância entre dois pontos amostrais pertencentes ao mesmo domínio não considera quais sejam esses pontos, mas sim a distância e orientação entre eles.

A segunda hipótese que deve ser assumida é a estacionaridade de 2<sup>a</sup> ordem da função variograma, segundo a qual as variáveis regionalizadas apresentam variância finita.

Uma vez que o variograma experimental esteja calculado é possível fazer a interpretação de suas propriedades, mostradas na Figura 2 e descritas tal como em Journel e Huijbregts (1978).

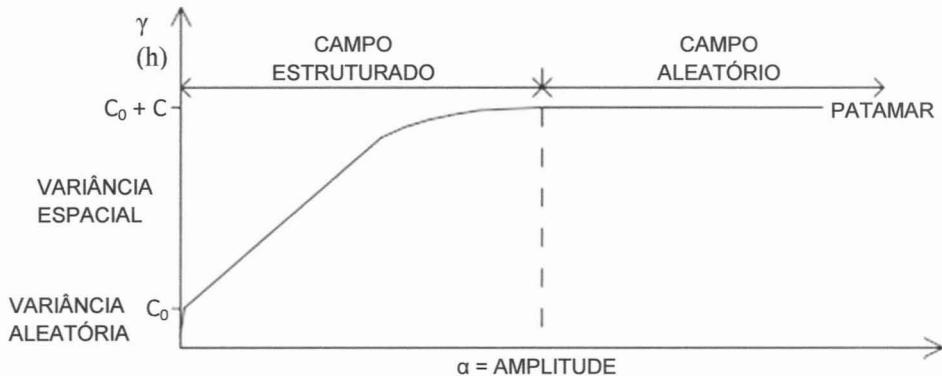


Figura 2 – Propriedades do variograma com patamar.

- patamar: é o valor limite ao redor do qual o variograma se torna estável, que corresponde simplesmente à variância *a priori* da função;

- amplitude: corresponde à zona de influência do variograma, sendo que além da distância  $|h| = \alpha$ , as variáveis  $Z(x)$  e  $Z(x+h)$  não mais apresentarão correlação espacial.

- efeito pepita = corresponde a uma aparente descontinuidade na origem do variograma, onde  $\gamma(h) \neq 0$  quando  $h \rightarrow 0$ . Esta propriedade é utilizada para caracterizar a influência residual de variabilidades que ocorrem em distâncias muito menores que a escala de observação ou devido a erros de amostragem (Journel e Huijbregts, 1978).

No entanto, não se deve esperar que a mineralização apresente o mesmo comportamento para todas as direções: a função variograma é vetorial, e deve ser calculada para diversas direções para que seja possível identificar possíveis anisotropias na mineralização. O processo que leva à identificação de anisotropias também é chamado de análise estrutural ou análise exploratória.

#### 4.1.3 TÉCNICAS DE KRIGAGEM

A partir do modelo teórico de variograma é possível aplicar as técnicas de estimativa como, por exemplo, a krigagem. A krigagem consiste basicamente em encontrar um estimador linear não-enviesado que permita obter os valores de uma variável regionalizada em um ponto ou bloco não-amostrado, admitindo-se um conjunto ótimo de pesos para os dados de amostragem disponíveis e relevantes, de modo a evitar desvios sistemáticos e garantindo a minimização da variância do erro (Krige, 1981).

##### 4.1.3.1 KRIGAGEM ORDINÁRIA

A técnica mais comum de krigagem é a krigagem ordinária, aplicada quando não se conhece a média da população, ou tal como em Journel (1977):

$$E[Z(x_0)] = m(x_0) = m(x_i) = \text{constante desconhecida } m, \quad \forall x_0, x_i$$

Os dados utilizados consistem em um conjunto de valores discretos definidos com base em suportes pontuais, ou então são valores médios  $Z_{v_i}(x_i)$  definidos nos suportes  $v_i$  centrados no ponto  $x_i$ . Sendo assim, o estimador linear  $Z^*(x_0)$  consiste na combinação linear dos  $n$  valores

$$Z(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Z(x_i)$$

sendo que  $\lambda_i$  consiste no ponderador ou peso associado a cada ponto.

A condição de não-viés é garantida impondo-se a condição

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

O melhor conjunto de ponderadores deve ser utilizado como forma de minimizar a variância do erro. Esse conjunto de ponderadores ideais é obtido através da resolução de um sistema de equações, que em sua forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{1-1} & \gamma_{1-2} & \cdots & \gamma_{1-n} & 1 \\ \gamma_{2-1} & \gamma_{2-2} & \cdots & \gamma_{2-n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 1 \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_{n-n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{1-0} \\ \gamma_{2-0} \\ \cdots \\ \gamma_{n-0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

#### 4.1.3.1.1 KRIGAGEM PONTUAL E KRIGAGEM DE BLOCOS

A krigagem pode ser feita para se estimar pontos ou blocos. A krigagem pontual tem como objetivo principal representar graficamente os aspectos geológicos estudados por meio de mapas de isovalores ou superfícies tridimensionais, enquanto a krigagem de blocos foi desenvolvida exclusivamente para a mineração, como ferramenta para determinar teores de painéis ou blocos de cubagem (Capítulo 6, Métodos Computacionais, Yamamoto, 2001).

A krigagem pontual estima os teores para um único ponto, e é executada a partir da resolução da matriz de equações de krigagem. Uma das vantagens da utilização deste método é que algumas amostras podem coincidir exatamente com o ponto a ser estimado. Isso porque, além de ser um estimador não-enviesado, a krigagem é também um interpolador exato. Nesse caso, o sistema de krigagem retornará um estimador  $Z_k^*$  idêntico ao teor conhecido  $Z_{(x)}$ , além de uma variância de krigagem nula,  $\sigma_k^2 = 0$ .

Na krigagem de blocos áreas e volumes maiores são estimados, por isso a estimativa de um único ponto no centro do bloco seria insuficiente. Considera-se também a diferença composicional entre o ponto estimado e a unidade lavrada, e este é o erro de estimativa, o qual é dependente da qualidade da amostragem e da variabilidade natural do depósito (Yamamoto, 2001).

Ainda de acordo com Journel e Huijbregts (1978), no Teorema da Combinação das Estimativas de Krigagem, a krigagem de bloco é realizada a partir da subdivisão da unidade maior em sub-blocos. As informações obtidas para cada um dos sub-blocos, como os teores estimados para estes e os ponderadores usados na estimativa, podem ser combinados para obter os valores médios relativos ao bloco de cubagem.

#### 4.1.3.2 KRIGAGEM LOGNORMAL

A krigagem lognormal foi desenvolvida a partir do que Journel (1980) chamou de “abordagem gaussiana multivariada”, cujo intuito é transformar a função aleatória inicial  $Z(x)$

em uma função aleatória  $Y(x)$  com uma distribuição Gaussiana comum, fazendo com que as distribuições de  $Y(x)$  sejam determinadas. As estimativas são então obtidas através da transformação inversa dessas distribuições condicionadas de  $Y(x)$ .

A krigagem lognormal é particularmente importante quando  $Z(x)$  tem uma distribuição lognormal, pois um grande número de teores, por exemplo Cu, Au e U, tendem a uma distribuição lognormal.

Se os teores das amostras tiverem uma distribuição lognormal, a transformação é direta:  $Y(x) = \text{Log } Z(x)$ , e  $Y(x)$  tem uma distribuição normal. A principal ideia da krigagem lognormal é se aproveitar da distribuição dos dados para conseguir reduzir a influência de poucos teores altos (Roth, 1998). No entanto, a interpretação das estimativas como logaritmos dos valores originais é mais difícil e por isso é necessário fazer a transformação inversa dos valores, através da exponencial da estimativa por krigagem mais um termo de não-viés (Yamamoto, 2007):

$$Z^*_{\text{SLK}}(x_0) = \exp(Y^*_{\text{SK}}(X_0) + \sigma^2_{\text{SK}}/2)$$

ou

$$Z^*_{\text{OK}}(x_0) = \exp(Y^*_{\text{OK}}(x_0) + \sigma^2_{\text{OK}}/2 - \mu)$$

onde  $\sigma^2_{\text{SK}}$  e  $\sigma^2_{\text{OK}}$  são respectivamente as variâncias de krigagem para a krigagem simples e para a krigagem ordinária,  $\mu$  é o Multiplicador de Lagrange e  $\sigma^2_{\text{SK}}/2$  e  $\sigma^2_{\text{OK}}/2$  são os termos de não – viés (Yamamoto, 2007).

É preciso destacar que alguns estudos trazem discussões a respeito do efeito de suavização comum em estimativas realizadas através da krigagem. Segundo Journel et al. (2000), a krigagem fornece um mapa de estimativas com uma suavização desigual, que aumenta proporcionalmente à distância das amostras utilizadas. Segundo esses autores, a acurácia global, representada pelo semivariograma ou pela reprodução da variabilidade da mineralização, e a acurácia local, representada pela minimização da variância do erro, seriam objetivos conflitantes.

A suavização de teores seria ainda mais expressiva na krigagem lognormal, devido à operação de transformada reversa dos valores estimados. Esta dificuldade já foi abordada em 1978 por Journel e Huijbregts, segundo os quais a diferença entre o estimador e o estimador teórico não-enviesado pode ser atribuída a falta de robustez da equação exponencial aplicada aos valores estimados na transformada reversa. Estes autores propuseram a adição de um fator de correção,  $K_0$ , à transformada reversa, na seguinte forma:

$$Z_0^* = K_0 \exp[Y_{K_0}^* + \sigma'^2_{K_0}/2]$$

Em Yamamoto (2007), é proposto o uso de uma nova variável, chamada número de desvio padrão de interpolação (*number of interpolation standard deviation*), usada em um pós-processamento dos dados e definido como:

$$N_{S_0} = \frac{-\text{Erro}(x_0)}{S_0}$$

Essa variável é subtraída no caso de valores superestimados e adicionada no caso de valores subestimados, além de outros procedimentos que são detalhados no estudo.

Abordagens diferentes são propostas por exemplo, por Marcotte e Groleau (1997), Tolosana-Delgado e Plawowsky-Glahn (2007).

#### 4.2 GEOLOGIA DA ÁREA DE ESTUDO

A mina de Capanema, hoje exaurida, localiza-se no estado de Minas Gerais na região do Quadrilátero Ferrífero, entre os municípios de Santa Bárbara e Itabirito. A mina ocupa a parte sudeste da Serra do Ouro Fino, como é chamada naquele trecho a Serra do Espinhaço (Guimarães *et al.* 1986)

A coluna estratigráfica local, proposta por Massahud e Viveiros<sup>1</sup>, (1983, *apud* Guimarães *et al.* 1986) é apresentada na Tabela 1.

O depósito está contido na estrutura conhecida como Sinclinal de Ouro Fino, a qual foi afetada por três fases de deformação dúcteis e posteriormente, por uma fase de deformação rúptil. O grau metamórfico observado localmente é do fácie xisto-verde (Guimarães *et al.*, 1986).

Em relação ao minério de ferro que foi produzido na mina, sua origem é explicada pelo enriquecimento supérgeno de porções dos itabiritos dolomíticos da Fm. Cauê através de alteração laterítica intensa e profunda (Dardenne e Schobbenhaus, 2001).

<sup>1</sup> Massahud, J. S e Viveiros, J. F. M. de. 1983. *Geology of the Capanema iron ore deposit: a review*. Simpósio sobre minério de ferro da Fundação Carl Duisberg. Belo Horizonte.

Tabela 1 – Coluna Estratigráfica Local (Massahud e Viveiros, 1983, *apud* Guimarães et al. 1986)

Super-Grupo	Grupo	Formação	Litologias Principais
Minas	Itabira	Cauê	itabiritos, anfibolíticos e formação ferrífera anfibolítica
	Caraça	Batatal	filitos sericíticos
		Moeda	quartzitos puros e quartzitos cianíticos
Rio das Velhas	Maquiné	Indivisa	clorita-xistos com intercalações de quartzitos

## 5. MATERIAIS E MÉTODOS

Os procedimentos práticos foram integralmente realizados através do programa de computador Isatis®, da empresa Geovariances, de uso específico para estimativas, além de um banco de dados referentes aos teores de SiO<sub>2</sub> da mina de Capanema.

Essa base de dados reúne informações obtidas em testemunhos de 70 furos de sonda rotativa diamantada e também de pó de rocha obtidos em 6988 furos de perfuratriz tipo *rockdrill*, sendo que estes últimos são feitos na superfície das bancadas segundo uma malha regular de 28,28 x 28,28 x 13,0 m, e os primeiros apresentam malha mais espaçada (Rocha, 1999).

Os métodos empregados no estudo desses dados foram a análise estatística clássica, através da determinação das medidas de tendência central (média, mediana e moda), de dispersão em torno da média (variância, desvio padrão, coeficiente de variação), do grau de simetria (assimetria) e do grau de achatamento (curtose); e também os métodos de análise geoestatística de krigagem ordinária e krigagem lognormal, já caracterizados no item 4 (Fundamentação Bibliográfica). O controle da eficácia dos dois métodos foi feito a partir da comparação dos resultados estimados pelos dois métodos testados com os teores obtidos pela análise do pó dos furos de perfuratriz.

## 6. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

As atividades propostas foram realizadas sempre de acordo com o cronograma apresentado no Projeto Inicial e reapresentado na Figura 3. Todas as atividades puderam ser concluídas.

Primeiramente, buscou-se o aprofundamento no conhecimento da teoria relacionada aos estudos de geoestatística e às particularidades das técnicas empregadas na execução

do trabalho. Para tanto, foi realizada a revisão bibliográfica dos temas específicos da área de geoestatística.

A preparação para a realização das atividades propostas também exigiu o treinamento em softwares específicos, em especial o programa Isatis®, da empresa Geovariances. Este treinamento foi realizado no Laboratório de Informática Geológica (LIG) do Instituto de Geociências.

A partir de então foi possível dar início às atividades práticas programadas para o Trabalho de Formatura, sumarizadas a seguir:

- Consolidação da base de dados relativos à composição química de testemunhos de sondagens rotativas diamantada executadas na Mina de Capanema;
- Regularização das amostras, ou *composite*, como forma de homogeneizar e adequar dados referentes a amostras de diferentes tamanhos para um único suporte;
- Transformação logarítmica dos dados, etapa preparatória para a krigagem lognormal;
- Análise estatística dos dados não-regularizados, regularizados e dos dados transformados;
- Análise geoestatística dos dados regularizados e dos dados transformados, através do cálculo de variogramas experimentais e do ajuste de modelos teóricos a esses.
- Validação cruzada do modelo teórico do variograma e definição dos parâmetros de vizinhança a serem utilizados na estimativa dos dados.
- Estimativa dos teores de  $\text{SiO}_2$  através de krigagem ordinária.
- Estimativa dos teores de  $\text{SiO}_2$  através de krigagem lognormal.
- Análise dos resultados e avaliação quanto à eficiência dos dois métodos por comparação dos valores estimados com os valores analisados a partir do pó dos furos de perfuratriz.
- Elaboração da Monografia.

A maior parte das atividades foi realizada sem dificuldades, porém nas etapas de krigagem ordinária e krigagem lognormal ocorreu um problema no software Isatis® que resultava em erro fatal todas as vezes em que se tentava rotacionar o *grid* onde as estimativas seriam realizadas. O erro foi relatado à empresa Geovariances, responsável pelo software, mas não foi encontrada uma solução para o problema em tempo hábil. Por essa razão, ficou impossibilitada a krigagem por blocos, e optou-se por fazer a krigagem pontual, sem prejuízo ao resultado final do trabalho, uma vez que as estimativas foram realizadas utilizando os pontos amostrados e analisados a partir do pó dos furos de perfuratriz.

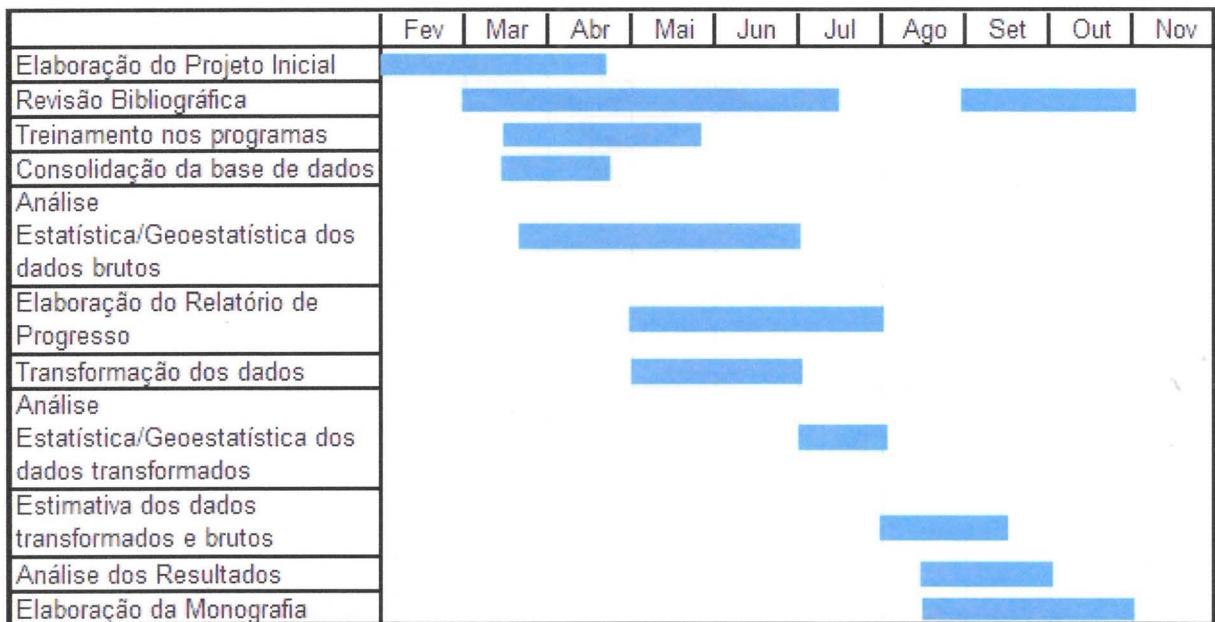


Figura 3 – Cronograma de atividades, indicando que as tarefas planejadas para o desenvolvimento do projeto foram integralmente concluídas.

## 7. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

### 7.1 CONSOLIDAÇÃO DA BASE DE DADOS

Primeiramente, os teores de  $\text{SiO}_2$  reunidos no banco de dados foram comparados com os valores apresentados em Guimarães *et al.* (1986) para a Mina de Capanema em busca de possíveis *outliers*, entretanto, a  $\text{SiO}_2$  pode apresentar grande variabilidade de teor em minérios de ferro do tipo BIF (*banded iron formation*), de modo que foram eliminados apenas valores incongruentes: teores negativos ou superiores a 100%.

A seguir, a localização dos furos foi plotada em um mapa base, agora para a identificação de *clusters* ou pontos muito distantes dos demais, os quais poderiam indicar erros de digitação ou repetições no banco de dados. Não foram encontrados pontos anômalos. O mapa base é mostrado na Figura 4. Deve-se destacar que o pequeno agrupamento observado próximo às coordenadas 44750 e 66600 é fruto de um furo inclinado projetado no plano horizontal.

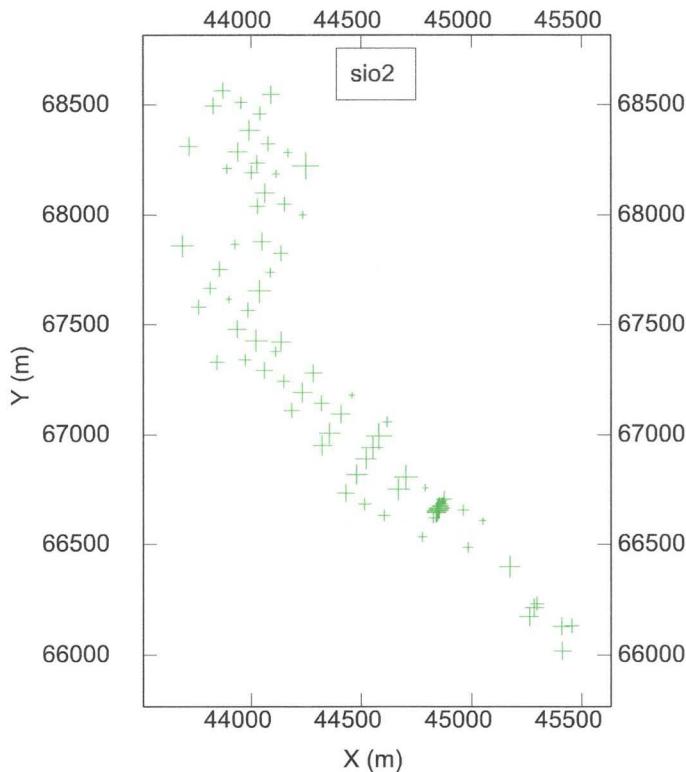


Figura 4 – Mapa base dos furos de sonda.

## 7.2 REGULARIZAÇÃO DAS AMOSTRAS

A regularização das amostras, ou *composite*, é uma etapa necessária devido à variação do tamanho dos testemunhos analisados. Para o banco de dados utilizado a regularização das amostras foi feita fixando-se o intervalo de 13 m, que corresponde à altura das bancadas na mina de Capanema, com tolerância de 5 m, portanto trechos com comprimentos menores que 8 m foram descartados.

## 7.3 TRANSFORMAÇÃO DOS DADOS

A transformação dos dados é um requisito para a realização da krigagem lognormal. Os dados regularizados foram transformados para uma distribuição lognormal utilizando-se o software Isatis, através da seguinte operação:

$$v_2 = \ln (v_1 + 0,29)$$

onde:  $v_2$  é o valor transformado da amostra

$v_1$  é o valor inicial da amostra que corresponde a Z (x)

A constante 0,29 foi adicionada como meio de garantir que não houvesse dados com valor menor que 1,0 , caso em que apresentariam logaritmo negativo.

#### 7.4 ANÁLISE ESTATÍSTICA

O banco de dados foi analisado como um todo, não foi feita a separação dos dados em relação às diferentes litologias amostradas. As medidas de tendência central e dispersão dos dados foram calculadas para os dados brutos, dados regularizados e dados transformados, e os resultados são apresentados na Tabela 2 e em histogramas nas Figuras 5 (a, b e c)

Os dados regularizados apresentam menor variância e desvio padrão em relação aos dados brutos, mostrando que a regularização dos dados resultou em valores mais homogêneos; os dados transformados apresentam ainda maior homogeneidade. Os histogramas a e b tem assimetria positiva, mostrando que teores baixos predominam sobre teores altos, o que era esperado para o teor de SiO<sub>2</sub> no minério de ferro. O histograma c não apresenta mais esse tipo de assimetria.

Tabela 2 – Estatística descritiva dos furos de sonda, realizada para dados brutos, dados regularizados e dados transformados.

Variável	Nº de amostras	Mínimo	Máximo	Média	Desvio Padrão	Variância	Assimetria	Curtose
SiO <sub>2</sub>	761	0,700	57,330	12,478	12,459	155,22	0,94	2,86
SiO <sub>2</sub> (regularizados)	364	0,713	54,002	12,510	11,561	133,670	0,98	3,19
SiO <sub>2</sub> (transformados)	364	0,00	3,99	2,03	1,110	1,23	-0,19	1,69

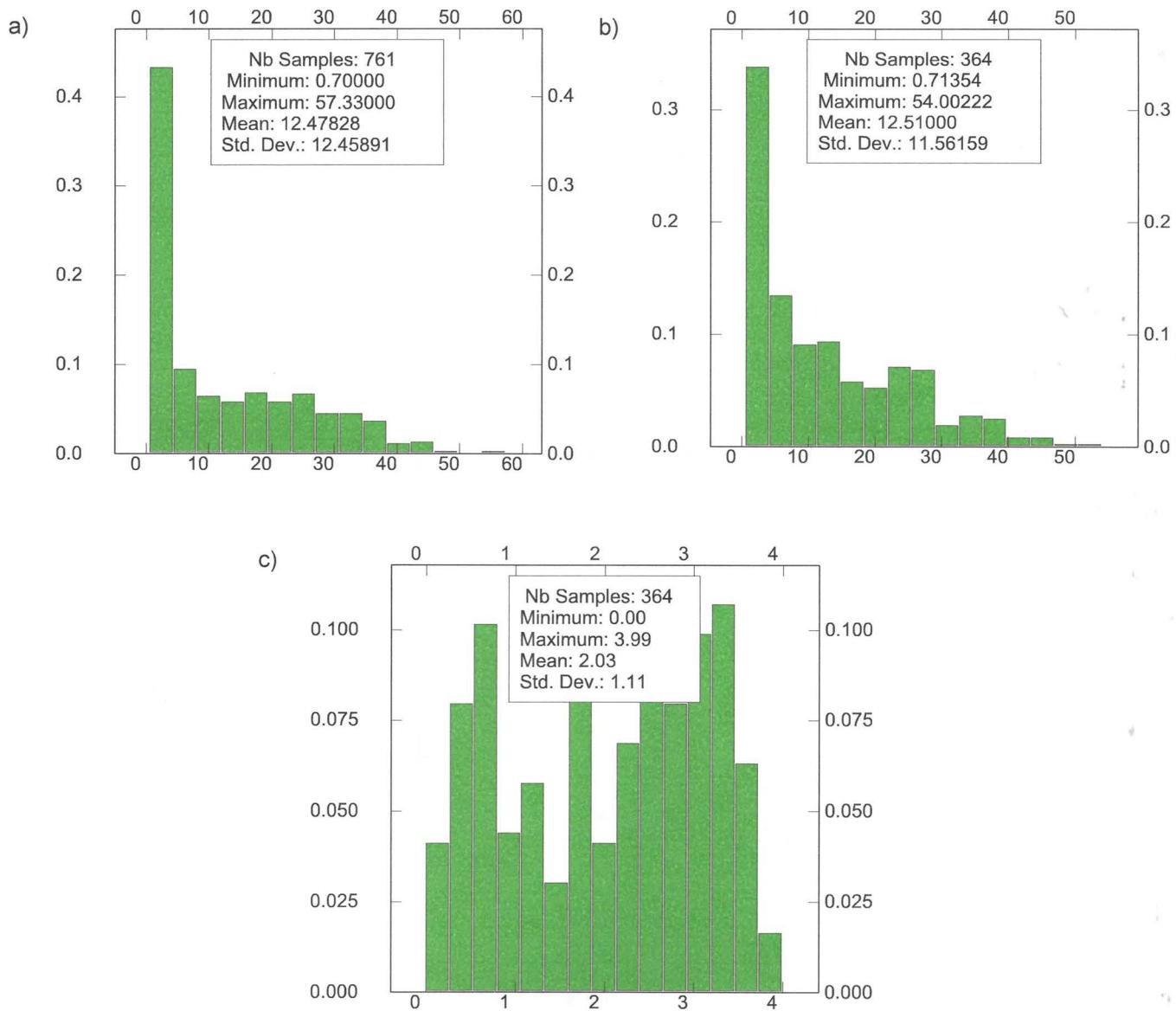


Figura 5 – Histogramas do teor de SiO<sub>2</sub> para os dados (a) antes da regularização das amostras, (b) dados regularizados e (c) dados transformados.

## 7.5 ANÁLISE GEOESTATÍSTICA

Os variogramas experimentais foram calculados levando-se em consideração o controle estrutural da mineralização na mina de Capanema, exercido pelo Sinclinal de Ouro Fino. Sendo assim, os variogramas foram calculados na direção do eixo desta estrutura, N134° e a cada 45° desta direção, todas no plano horizontal, e um variograma adicional no plano vertical. Foi considerada uma tolerância angular de 22,5° para as direções horizontais e 45° para a direção vertical.

Na Tabela 3 apresentam-se os parâmetros utilizados para o cálculo do variograma. Estes parâmetros foram definidos utilizando-se as informações geológicas e a distribuição espacial dos furos observado no mapa base (Figura 6):

Tabela 3 – Parâmetros para o cálculo dos variogramas experimentais

Direção	Mergulho	Tolerância Angular	Passo	Tolerância do Passo	Número de Passos
359°	0°	22,5°	100	50%	13
44°	0°	22,5°	75	50%	5
89°	0°	22,5°	100	50%	10
134°	0°	22,5°	100	50%	9
0°	90°	45°	13	50%	15

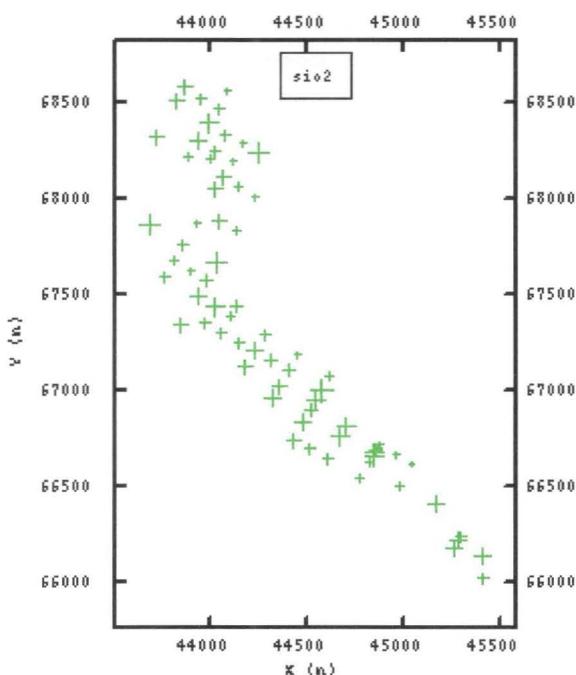


Figura 6 – Mapa base das amostras de furo de sonda.

A análise e interpretação dos variogramas apresentados nas Figuras 7 e 8, indicaram a presença de anisotropia com eixos principais nas direções N44 e N134, confirmando o controle estrutural exercido pelo Sinclinal de Ouro Fino.

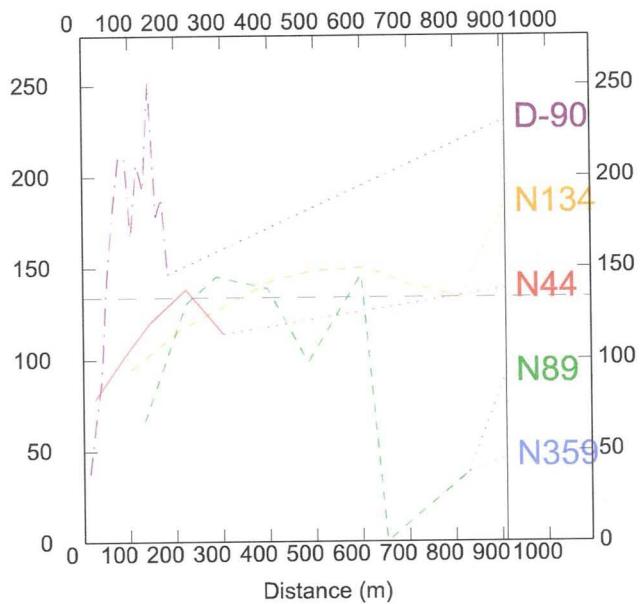


Figura 7 – Variogramas de quatro direções horizontais e uma direção vertical para os dados regularizados.

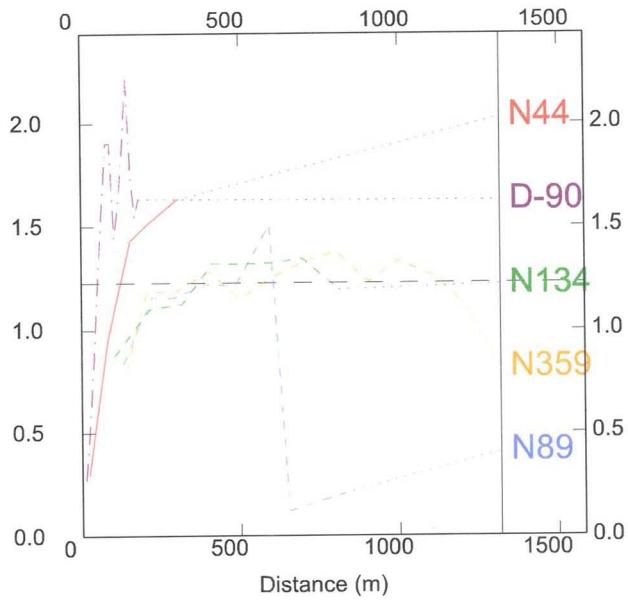


Figura 8 – Variogramas de quatro direções horizontais e uma direção vertical para os dados transformados.

Após o cálculo dos variogramas experimentais foi realizado o ajuste dos modelos teóricos de variograma aos experimentais. O modelo do tipo esférico foi o que melhor ajustou os variogramas das três direções.

As estruturas que definem os modelos teóricos são apresentadas nas Tabelas 4 e 5. O modelo teórico do variograma dos dados regularizados é apresentado na Figura 9 e, dos dados transformados, na Figura 10. O modelo teórico de variograma para os dados regularizados foi ajustado com efeito pepita igual a 10 e para os dados transformados foi igual a 0,05.

Tabela 4 – Estruturas definidas para o ajuste do modelo teórico do variograma, para dados regularizados.

Estrutura	Modelo	Variância Espacial	Amplitude Máxima	Amplitude Mínima	Amplitude Vertical
1	Esférico	114	300	165	80
2	Esférico	11	400	-	80
3	Esférico	55	-	-	80

Tabela 5 – Estruturas definidas para o ajuste do modelo teórico do variograma, para dados transformados.

Estrutura	Modelo	Variância Espacial	Amplitude Máxima	Amplitude Mínima	Amplitude Vertical
1	Esférico	1	250	140	80
2	Esférico	0,15	120	-	80
3	Esférico	0,5	-	-	80

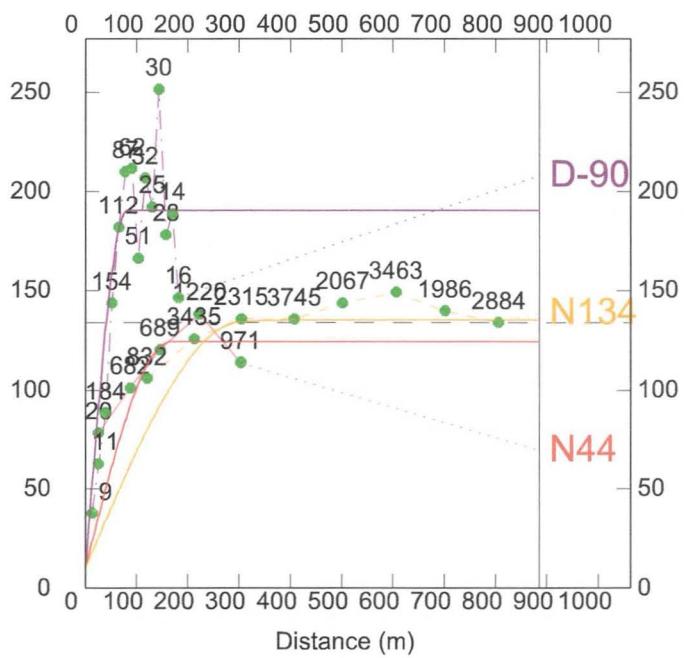


Figura 9 – Modelo teórico do variograma ajustado ao variograma experimental dos dados regularizados.

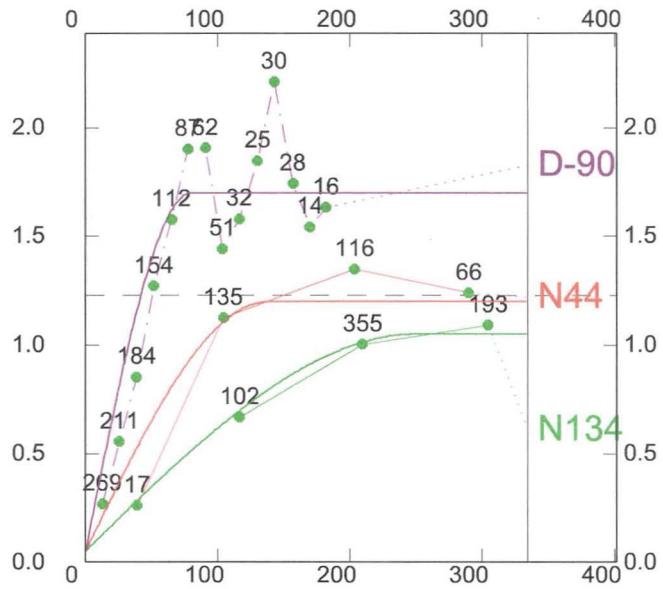


Figura 10 – Modelo teórico de variograma ajustado ao variograma experimental dos dados transformados.

## 7.6 VALIDAÇÃO CRUZADA

A validação cruzada é feita para aferir o ajuste do modelo teórico de variograma, para obter o erro da estimativa da variância e principalmente para obter os parâmetros de vizinhança.

Diversos parâmetros foram testados, e a melhor configuração deve ser escolhida como aquela que combine um alto coeficiente de correlação entre o valor real (valor da amostra) e a variável estimada, com um diagrama de dispersão formando uma nuvem de dispersão mais próxima da reta de primeira bisetriz e o número de pontos estimados mais próximo do número de amostras.

Os parâmetros das vizinhanças escolhidas para os dados regularizados e dados transformados foram os mesmos, pois em ambos os casos apresentaram um coeficiente de correlação satisfatório: 0,781 para os dados regularizados e 0,829 para os dados transformados. Na Tabela 6 são apresentados os parâmetros utilizados e os diagramas de dispersão são mostrados nas Figuras 11 e 12.

Pode-se observar que os pontos transformados apresentam uma nuvem de dispersão mais próxima da reta 1:1 do que no caso dos pontos regularizados, o que é refletido pelo maior coeficiente de correlação daqueles em relação a esses. Essa diferença é justificada pelo fato dos dados transformados apresentarem variância menor que os dados regularizados.

Tabela 6 – Parâmetros de vizinhança para a validação cruzada do ajuste do modelo teórico de variograma

Variável	Nº mínimo de amostras	Nº de setores angulares	Nº ideal de amostras por setor	Nº máximo de setores consecutivos vazios	Raio máximo de busca em 44°	Raio máximo de busca em 134°
$\text{SiO}_2$	4	4	2	2	175	350

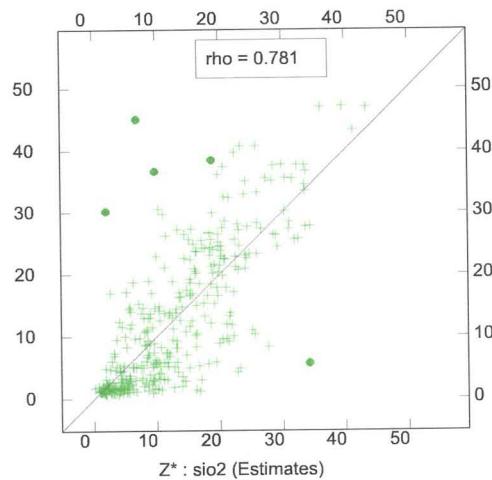


Figura 11 – Diagrama de dispersão entre os pontos regularizados e os pontos estimados.

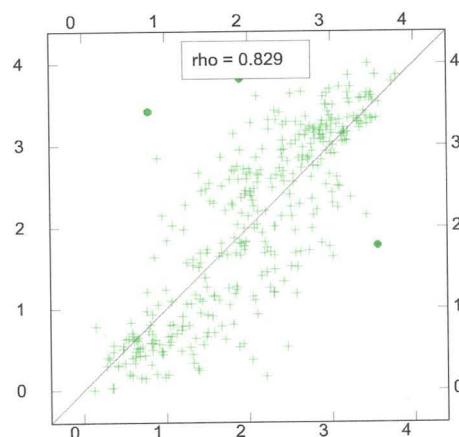


Figura 12 – Diagrama de dispersão entre os pontos transformados e os pontos estimados.

## 7.7 ESTIMATIVA POR KRIGAGEM ORDINÁRIA

Utilizando os parâmetros de vizinhança apresentados anteriormente, foi realizada a estimativa por krigagem pontual, uma vez que como explicado no item 6 – Desenvolvimento

do Trabalho, optou-se por não realizar a krigagem de blocos, pois a melhor configuração, com os blocos rotacionados, não foi atingida.

O mapa base da Figura 13 mostra a distribuição das amostras de testemunho de sondagem rotativa, que foram analisados estatística e geoestatisticamente por este estudo, em sobreposição aos dados de *rockdrill*, e a Figura 14 mostra a distribuição dos pontos estimados pela krigagem ordinária.

Na Figura 15 é apresentado o histograma mostrando a distribuição dos valores estimados para o teor de  $\text{SiO}_2$  da mina de Capanema e um modelo em três dimensões da configuração das amostras estimadas e seus respectivos teores, na Figura 16.

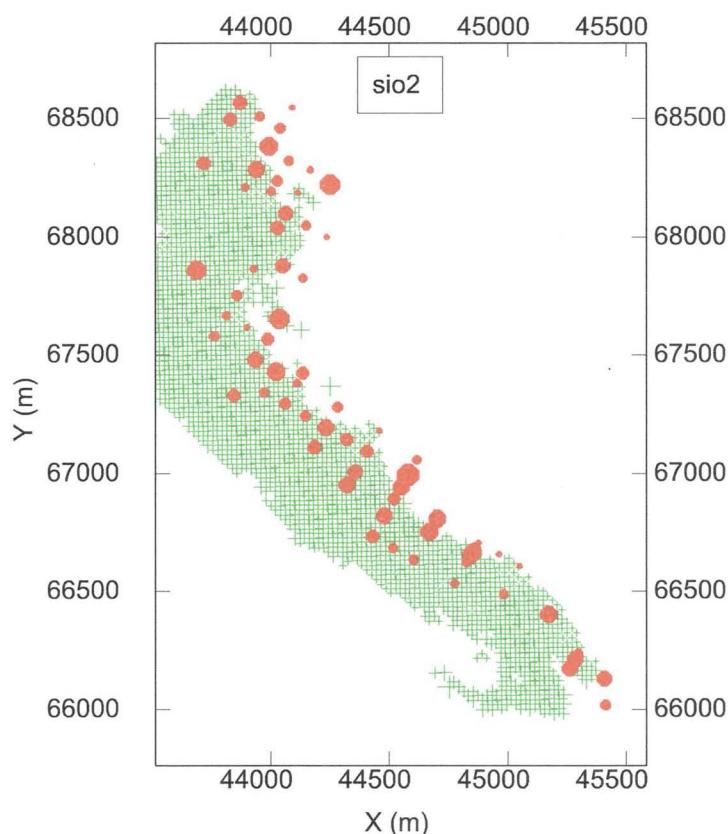


Figura 13 – A distribuição das amostras de testemunho de sondagem rotativa é representada por círculos vermelhos, e as amostras do tipo *rockdrill* são representadas por cruzes verdes.

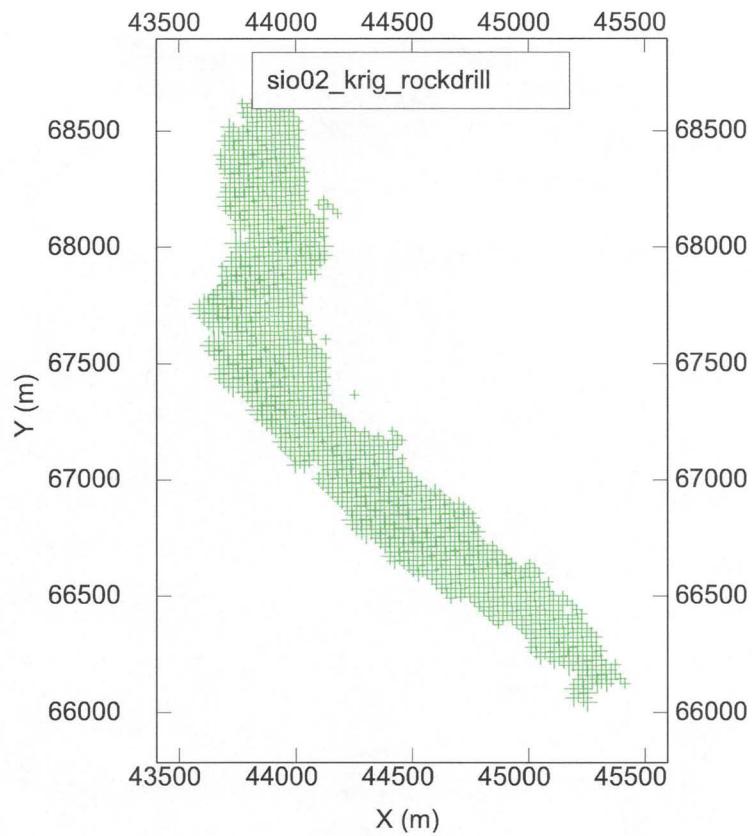


Figura 14 – Distribuição dos pontos estimados pela krigagem ordinária.

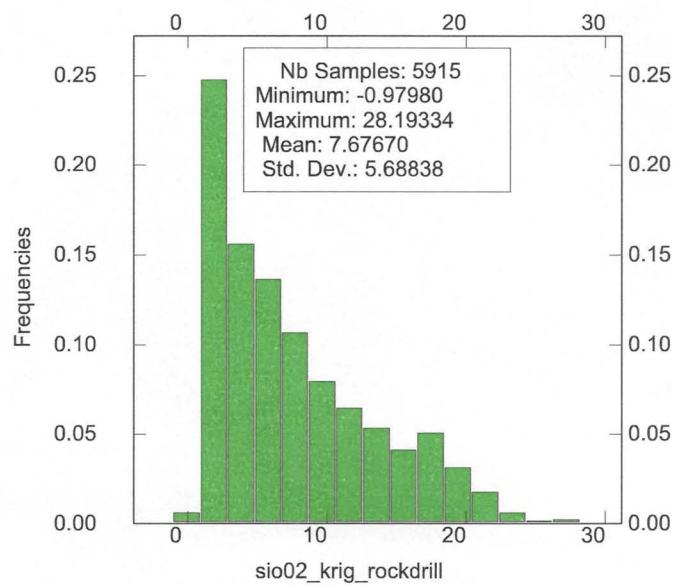


Figura 15 – Histograma do teor de SiO<sub>2</sub> dos pontos estimados pela krigagem ordinária.

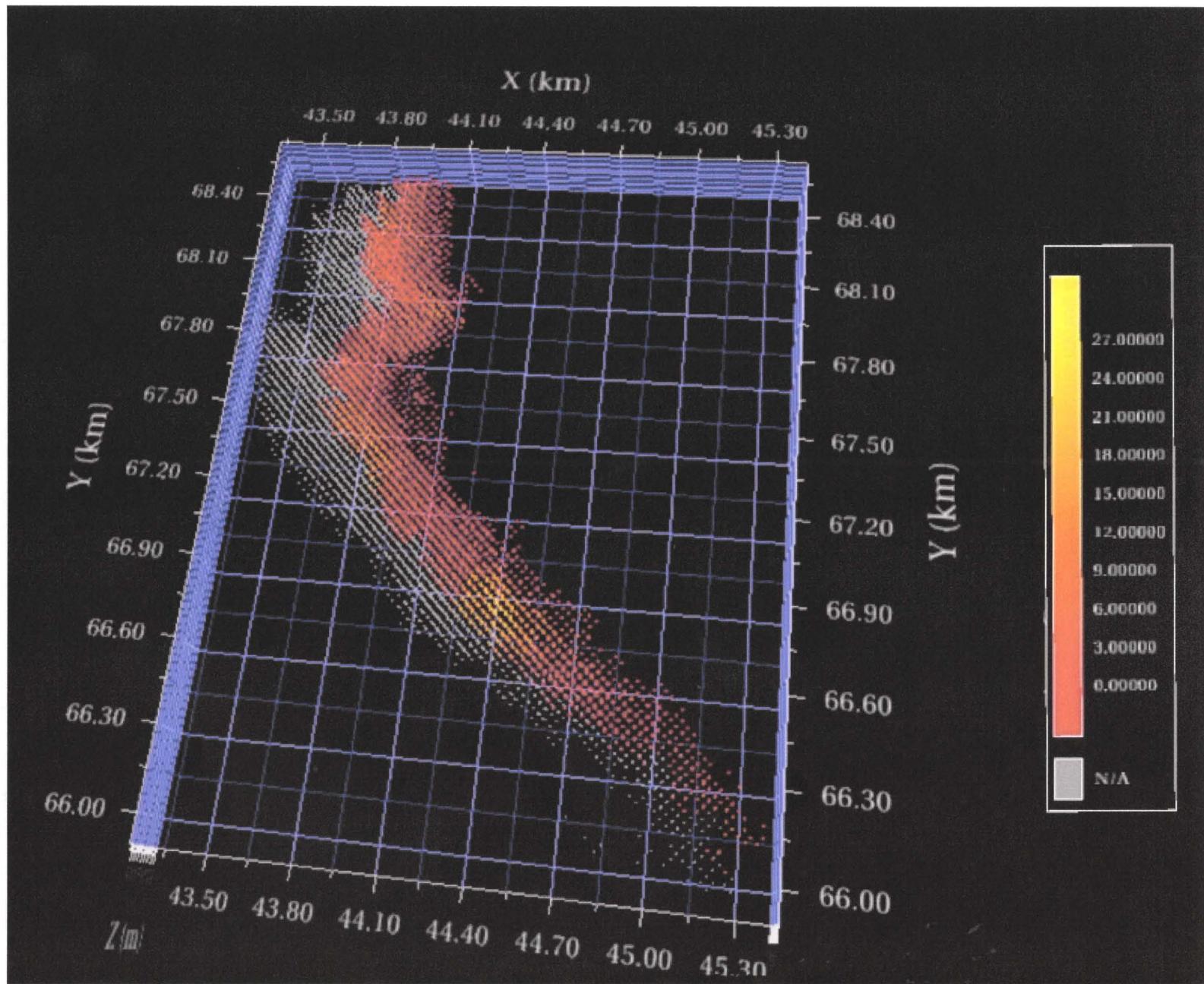


Figura 16 – Modelo tridimensional dos pontos estimados por krigagem ordinária.

## 7.8 KRIGAGEM LOGNORMAL

A krigagem lognormal foi feita utilizando-se os dados de teor de SiO<sub>2</sub> transformados. Os parâmetros de vizinhança foram os mesmos utilizados para a krigagem ordinária. Também foi feita a krigagem por pontos, utilizando os dados de *rockdrill* como indicação da distribuição dos pontos a serem amostrados.

Depois de estimados, foi feita a transformada inversa dos pontos, através da aplicação da seguinte fórmula:

$$v_I = \exp v_2 - 0,29$$

onde:  $v_I$  é o teor no ponto estimado, após a transformada inversa

$v_2$  é o valor estimado pela krigagem lognormal

O mapa de distribuição mostrado na Figura 17 mostra que os mesmos pontos estimados para a krigagem ordinária foram estimados na krigagem lognormal. O histograma apresentado na Figura 18 mostra a distribuição dos teores de SiO<sub>2</sub> estimados por esse método. Também é apresentado um modelo tridimensional das amostras estimadas e seus teores (Figura 19).

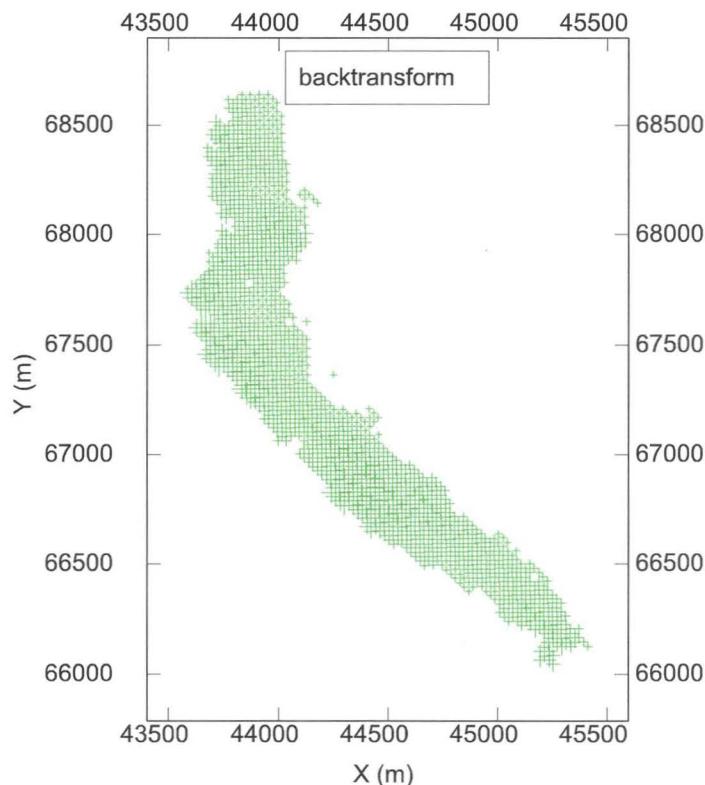


Figura 17 - Distribuição dos pontos estimados pela krigagem lognormal.

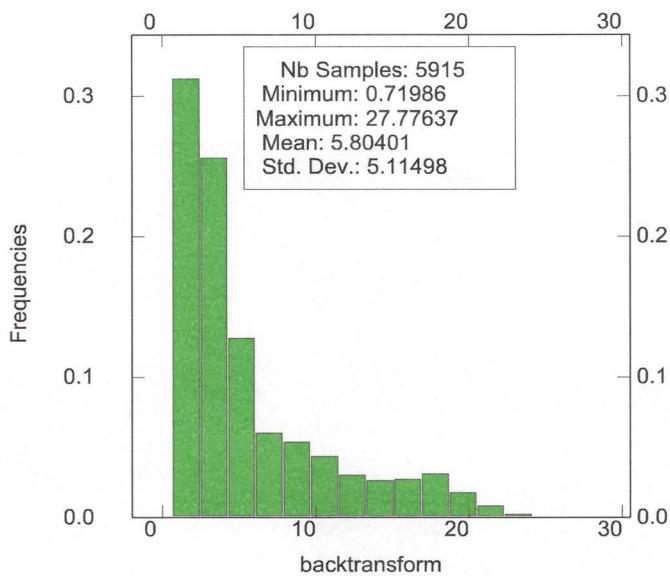
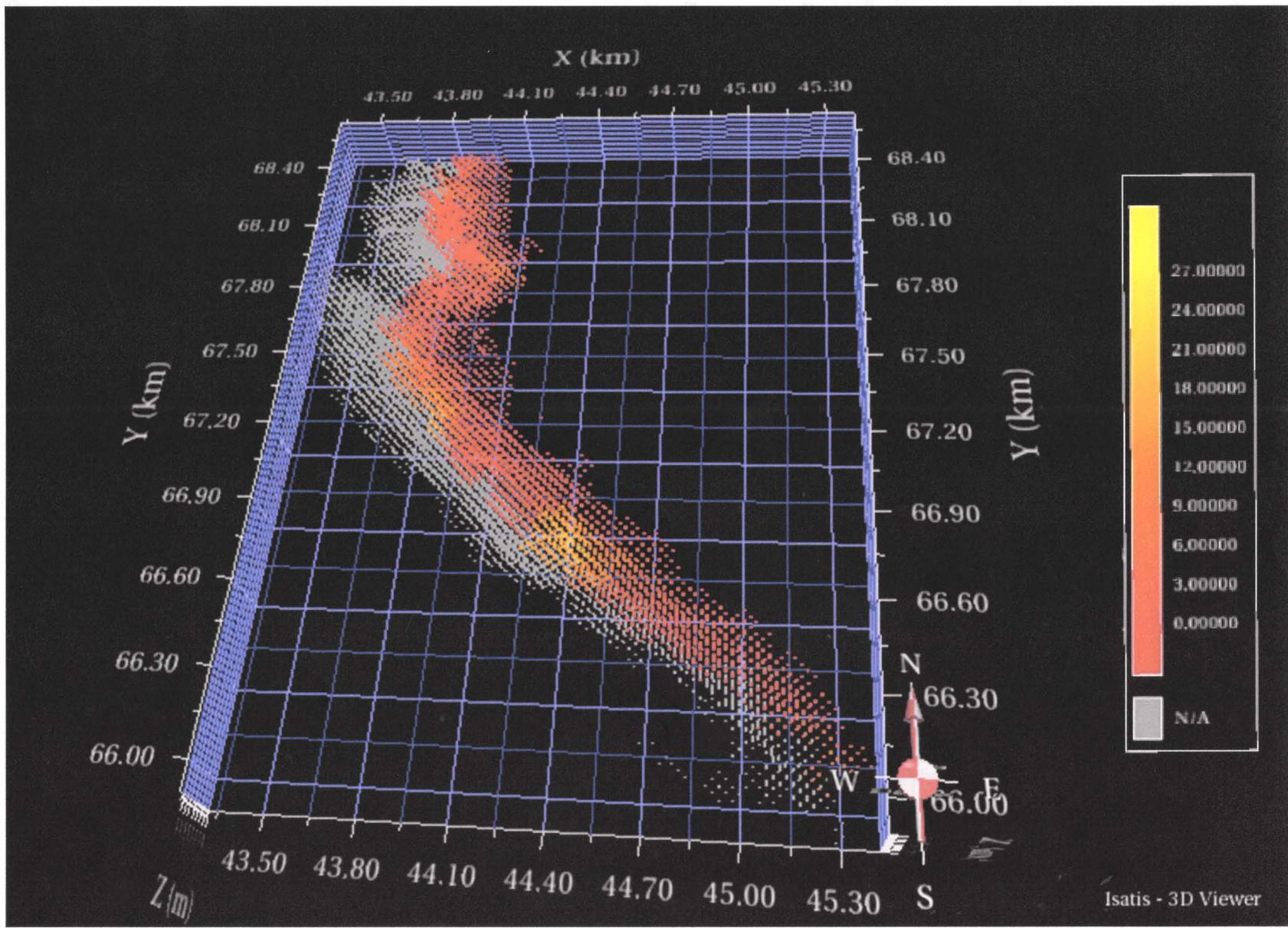


Figura 18 - Histograma do teor de  $\text{SiO}_2$  dos pontos estimados pela krigagem lognormal.

Figura 19 – Modelo tridimensional dos pontos estimados por krigagem lognormal.



## 7.9 COMPARAÇÃO ENTRE OS DOIS MÉTODOS DE KRIGAGEM

Para aferir as estimativas, os resultados obtidos através de ambos os métodos de krigagem foram comparados com os teores de  $\text{SiO}_2$  reais das amostras de pó de furo de perfuratriz, obtidos através das análises químicas disponíveis para os mesmos.

A análise estatística realizada para os dados reais e estimados é apresentada na tabela 7.

Tabela 7 – Estatística descritiva dos furos de sonda, realizada para dados brutos, dados regularizados e dados transformados.

Variável	Nº de amostras	Mínimo	Máximo	Média	Desvio Padrão	Variância	Assimetria	Curtose
$\text{SiO}_2$ (rockdrill)	6947	0,13	50,63	8,52	8,63	74,43	1,29	4,17
$\text{SiO}_2$ (krigagem ordinária)	5915	-0,98	28,19	7,68	5,69	32,36	0,89	2,92
$\text{SiO}_2$ (krigagem lognormal)	5915	0,72	27,78	5,80	5,12	26,16	1,51	4,53

Foram feitos também diagramas de dispersão (Figuras 20 a 22), mostrando a correlação entre os dados reais e os dados estimados através de cada um dos métodos de krigagem. Os valores obtidos pelos dois métodos também são comparados.

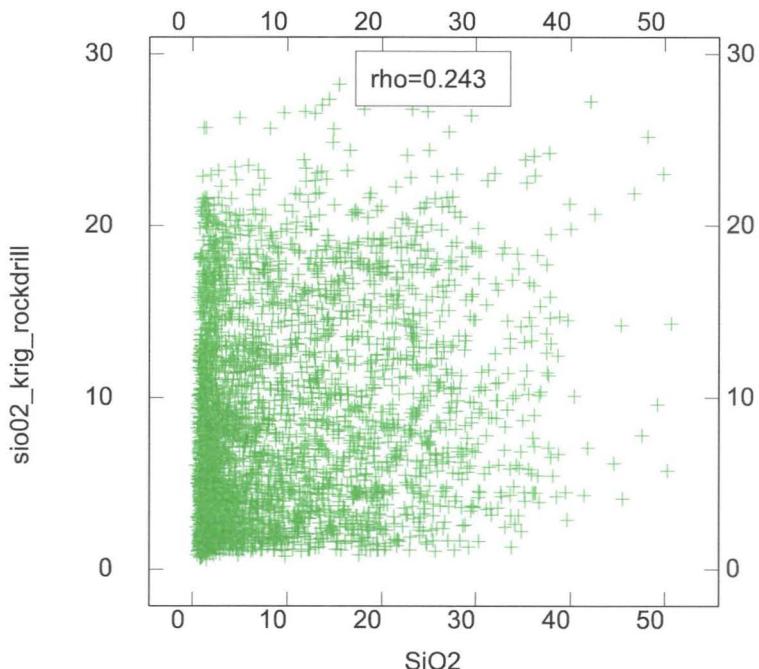


Figura 20 – Diagrama de dispersão entre os teores de  $\text{SiO}_2$  das amostras de rockdrill (eixo X) e teores estimados pela krigagem ordinária (eixo Y).

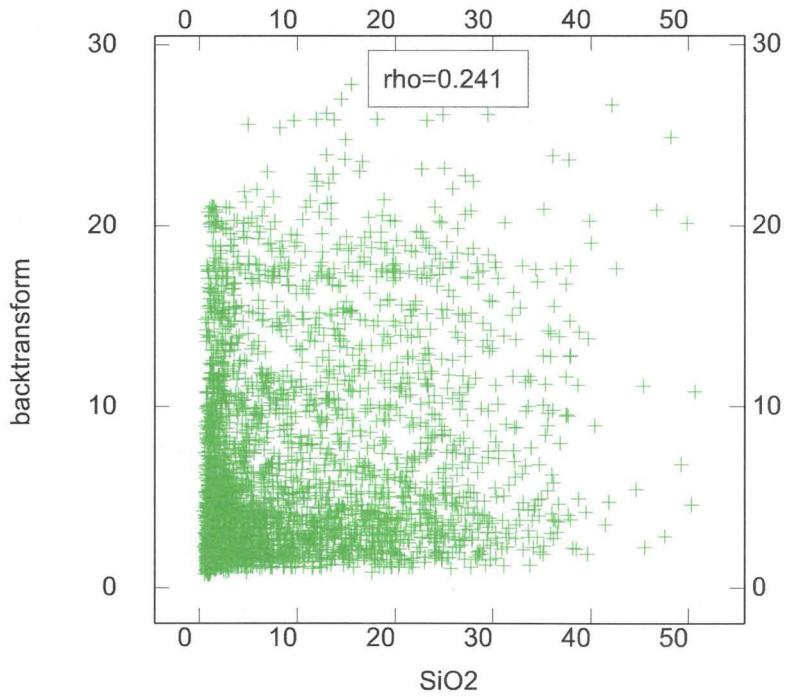


Figura 21 – Diagrama de dispersão entre os teores de SiO<sub>2</sub> das amostras de rockdrill (eixo X) e teores estimados pela krigagem lognormal (eixo Y).

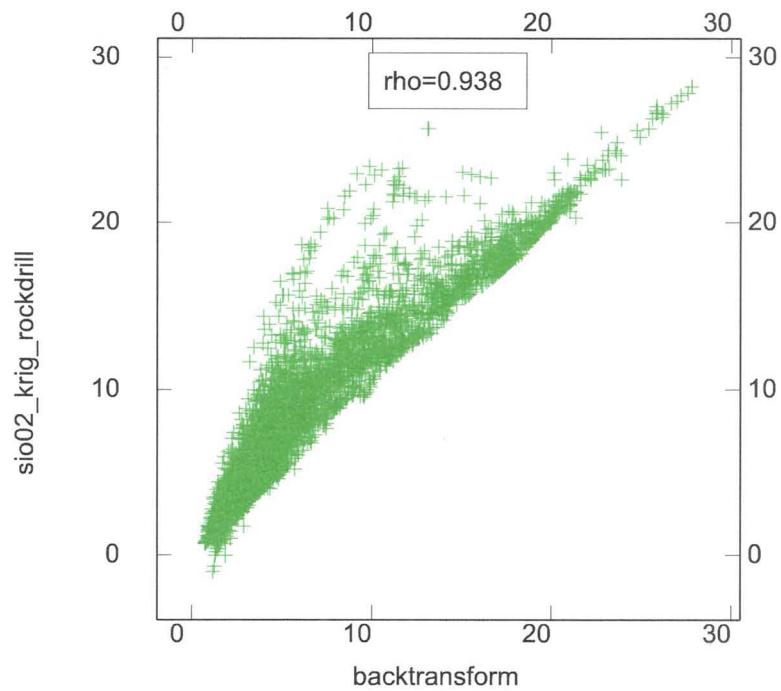


Figura 22 – Diagrama de dispersão entre os teores de SiO<sub>2</sub> estimados pela krigagem lognormal (eixo X) e teores estimados pela krigagem ordinária (eixo Y).

O problema de suavização dos teores, destacado no item 4 – Revisão Bibliográfica, pode ser percebido também neste estudo, através principalmente das médias e variâncias dos teores estimados, que se encontram consideravelmente abaixo dos teores reais. Embora na literatura vários autores apresentem técnicas para a correção desta suavização, neste trabalho nenhuma delas foi testada.

## 8. CONCLUSÕES

As estimativas de teores realizadas para a base de dados de sondagem apresentaram valores bastante distintos daqueles indicados pela análise química do pó de furos de perfuratriz, permitindo concluir que os teores foram suavizados ou subestimados tanto pela krigagem ordinária quanto pela krigagem lognormal.

Por outro lado, os valores estimados por ambos os métodos são similares entre si, o que pode ser visto pelo alto índice de correlação entre os dois, que é de 0,938, como mostra a Figura 22. Essa constatação indica que provavelmente a baixa qualidade da estimativa neste caso não se deve a ineficiência da krigagem, mas sim a pouca representatividade dos dados de testemunhos de sondagens rotativas, que apresentam poucas amostras, cobrindo uma área correspondente a menos da metade da área estimada. Também o espaçamento das amostras de sondagem rotativa, com cerca de 100 por 200 m, é muito superior ao espaçamento entre os pontos estimados, de cerca de 28 por 28 m, o que contribui para o aumento da suavização dos dados.

É possível perceber pelos dados da análise estatística e pelos coeficientes de correlação entre os dados reais e as estimativas que a suavização causada pela krigagem lognormal foi ligeiramente maior que na krigagem ordinária, mas essa diferença não foi expressiva, de modo que não se considera que nenhum dos dois métodos de estimativa testados tenha se mostrado mais eficaz.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dardenne M. A., Schobbenhaus C. 2001. *Metalogênese do Brasil*. Brasília, Editora da Universidade de Brasília, p. 155-156.
- Guimarães P. F., Massahud J. S., Viveiros J. F. M. de. 1986. A mina de ferro de Capanema, na parte central do Quadrilátero Ferrífero, Minas Gerais. In: *Principais Depósitos Minerais do Brasil*. Vol. II, capítulo VII. DNPM/ Companhia Vale do Rio Doce. 501 p.
- Journel A. G. 1977. *Kriging in Terms of Projections*. Mathematical Geology, **9** (6): 563 – 586.
- Journel A. G., Huijbregts C. J., 1978. *Mining Geostatistics*. Academic Press. Londres. 600p.
- Journel A. G. 1980. *The lognormal approach to predicting local distribution of selective mining unit grades*. Mathematical Geology, **12** (4): 285 – 303.
- Journel A. G., Kyriakidis P. C., Mao S. 2000 *Correcting the Smoothing Effect of Estimators: A Spectral Postprocessor*. Mathematical Geology, **32** (7): 787 – 813.
- Krige D. G. 1981. *Lognormal-de Wijsian geostatistics for ore evaluation*. Johannesburg, South African Institute of Mining and Metallurgy. 51 p.
- Marcotte D., Groleau, P. 1997. *A Simple and Robust Lognormal Estimator*. Mathematical Geology, **29** (8): 993 – 1008.
- Matheron G. 1963. *Principles of Geostatistics*. Economic Geology, **58** (8): 1246-1266.
- Rocha M. M. 1999. *Estudo comparativo entre os métodos computacionais de avaliação de reservas e controle de teores da mina de Capanema, Santa Bárbara, MG*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências, Universidade de São Paulo, 78 f.
- Roth C. 1998. *Is lognormal kriging suitable for local estimation?* Mathematical Geology, **30** (8): 999 – 1009.
- Tolosana-Delgado R., Pawlowsky-Glahn V. 2007. *Kriging Regionalized Positive Variables Revisited: Sample Space and Scale Considerations*. Mathematical Geology, **39** 529 – 558.
- Yamamoto J. K. 2001. Métodos Computacionais In: Yamamoto, J. K. – 2001. *Avaliação e classificação de reservas minerais*. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 2001. Capítulo 6.
- Yamamoto J. K. 2007. *On unbiased backtransform of lognormal kriging estimates*. Computational Geosciences **11**: 219 – 234.

